XV олимпиада МЦНМО по теории вероятностей и статистике

правила и регламент основного тура 20 декабря 2021 г.— 23 января 2022 г.

1. Участие в основном туре

Дорогие участники олимпиады, родители и учителя. В целях популяризации математики и, в особенности, теории вероятностей и статистики – разделов математики, наиболее близких к жизни, мы с 2008 г. проводим эту заочную олимпиаду. Основной тур содержит 19 заданий, из которых 3 задания – эссе (небольшое сочинение на заданную тему) и 16 задач, которые требуют полного решения.

Участвовать в основном туре может любой школьник, студент ССУЗа, колледжа или лицея, независимо от участия, неучастия или результатов пригласительного тура.

ВНИМАНИЕ!

Каждую задачу мы рекомендуем участникам, начиная с некоторого класса. Это указание – ориентир для участников; оно не является ограничением. Любой участник может выполнять любое задание независимо от наших рекомендаций. Баллы начисляются в соответствии с критериями независимо от класса. Разница в возрасте учитывается при награждении и определении призеров и победителей.

2. Рассылка материалов

Все участники самостоятельно получают анкету, задания и настоящие правила на странице основного тура http://ptlab.mccme.ru/node/1702 .

3. Выполнение работы

В ходе раздумий над заданиями вы можете пользоваться любыми источниками (справочниками, учебниками, интернетом, получать консультации от учителя, от нас) по поводу теории вероятностей и статистики. Большую помощь может оказать изучение решений задач прошлых лет (см. архив на странице основного тура), посещение дистанционного кружка по теории вероятностей (http://ptlab.mccme.ru/node/1483). Неэтичным и попросту недопустимым является лишь прямое списывание или выполнение заданий за участника кем-то другим. Для консультаций с нами используйте, пожалуйста, форум «Консультация» на нашем сайте http://ptlab.mccme.ru. У вас больше месяца. Пожалуйста, не откладывайте все на последний день, но и не спешите.

4. Отсылка решений, проверка и оценивание

Свои решения и заполненную анкету участника вам нужно отправить *одним письмом* в любом текстовом или графическом формате (doc, docx, pdf, png, jpg и т. п., но не heic) на электронный адрес

prob-in-school@yandex.ru

до истечения суток 23 января 2022 года по московскому времени. Ответы и решения, высланные 24 января или позже, не принимаются. Ваши решения проверит оргкомитет.

Решения задач будут опубликованы на странице основного тура 24 января. Лучшие эссе будут опубликованы чуть позже после проверки.

5. Определение призеров и победителей, награждение

При проверке задания оцениваются разным числом баллов в зависимости от их сложности (максимальный балл за задачу указан в условии). Единственное требование, предъявляемое к решению задачи – решение должно быть математически верным.

Отдельно происходит определение призеров и победителей в 6–7 классах (и младше при наличии), отдельно в 8–9 классах и отдельно – в 10–11. Отдельно производится оценка эссе и награждение авторов лучших эссе.

Критерии награждения оргкомитет публикует после олимпиады, исходя из ее результатов. Претензии по критериям награждения не принимаются.

Победители и призеры получают дипломы и грамоты. Порядок и регламент награждения будет определен оргкомитетом, и вся информация будет размещена на странице олимпиады.

6. Апелляция

Апелляция по основному туру проводится по электронной почте с 31 января по 6 февраля 2022 г. включительно. Форма апелляции будет размещена на странице основного тура. *Оргкомитет прекратит переписку по поводу апелляций после 6 февраля,* независимо от того, все ли вопросы выяснены. При наличии разногласий просим уложиться в срок.

Искренне желаем удачи

Отдельное замечание

Мы редко сталкиваемся со случаями списывания и другими недобросовестными попытками искажения результатов. Но все же бывает. Если у оргкомитета возникают сомнения в самостоятельности выполнения работы, оргкомитет вправе дисквалифицировать работу.

Оргкомитет олимпиады:
И. Р. Высоцкий, А. К. Демченкова, Е. Ю. Заикин, Д. Б. Житницкий, Н. И. Сошитова, В. Ю. Шапарина, Н. А. Шихова, И. В. Ященко.

Авторы задач основного тура:
И. Р. Высоцкий, Д. Б. Житницкий, Н. И. Сошитова, Н. А. Шихова, Б. Р. Френкин

Анкета участника

Заполните, пожалуйста, поля анкеты и пришлите нам эту анкету вместе со своей работой – *одним электронным письмом*.

Обязательные поля помечены символом *.
Проверка Вашей работы будет проведена при наличии заполненной анкеты.

* Участник (ФИО):

* В каком классе вы учитесь?

* Ваш почтовый адрес:

* Адрес электронной почты:

Телефон, по которому можно Вам позвонить:

* Публиковать ли Вашу фамилию и имя в списке победителей, если Вы станете победителем тура? **Да**

Если Вы удалили «Да», то в списке вместо фамилии будет Ваш инициал. Например, *Василий К.*

Если есть, напишите, пожалуйста, свои впечатления, замечания, предложения или пожелания, чтобы мы могли учесть их в будущем.

Отправляя эту анкету, вы тем самым даете согласие на обработку Ваших персональных данных в той мере, в какой это необходимо для проверки работы, составления списка участников, призеров и победителей.

Эссе

Эссе – это сочинение небольшого объема на заданную тему. В отличие от задач, эссе не подразумевает точных решений, ответов или методов, но должно быть продуманным, аргументированным, подробным.

Вы можете выбрать любое эссе, или два, или все три. Эссе оцениваются отдельно. Баллы за эссе не суммируются и не прибавляются к баллам, полученным за решение задач. За лучшие эссе участники награждаются отдельными дипломами.

1. Правильная многогранная кость (10 баллов). Для любого ли $n \geq 4$ можно сделать правильную n-гранную игральную кость, то есть многогранник (с плоскими гранями), который при случайном броске на плоскую поверхность оказывается лежащим на любой из своих n граней с равными шансами? Ответ – да, можно. Несложно придумать такую фигуру. Но вот единственно ли решение? Попробуйте придумать два или больше принципиально различных многогранников, обладающих таким свойством. Для всякого ли $n \geq 4$ это возможно?

Рассуждение должно быть аргументированным. Если при каких-то n это сделать можно, убедительно покажите как. Если двух принципиально разных решений не существует, убедительно объясните почему.

2. Двойное усреднение с округлением (10 баллов). Годовую отметку учитель обычно выводит, усредняя отметки в два этапа. Сначала текущие отметки усредняют и при необходимости округляют до целого, чтобы поставить четвертную отметку. В конце года усредняют и округляют четвертные отметки, чтобы получить годовую. Если среднее значение получается полуцелым, то принято округлять в большую сторону. В таблице показан пример.

Табл. 1

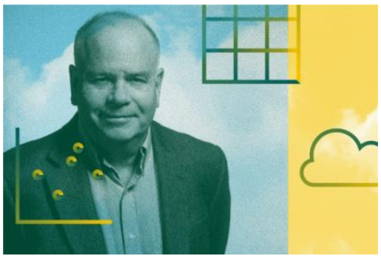
	Текущие отметки						Усреднение	Округление
I четверть	3	3	4	3	5	3	$\frac{3+3+4+3+5+3}{6}=\frac{21}{6}=3,5$	4
II четверть	4	3	4	4			$3,75$	4
III четверть	4	3	5	5	4	5	$\approx 4,33$	4
IV четверть	4	3	4	2	4		$3,4$	3
Годовая							$\frac{4+4+4+3}{4}=3,75$	4
Истинное среднее текущих отметок							$\frac{79}{21}\approx 3,76$	

В этом примере итоговая годовая отметка 4 больше, чем среднее значение всех текущих отметок, но ненамного (на 0,24). Возникает масса вопросов, связанных с тем, как и насколько двойное усреднение с округлением искажает истинное среднее значение.

Может ли случиться так, что отличие окажется больше, чем 0,5? То есть, например, может ли быть годовая четверка при среднем значении всех текущих меньше, чем 3,5? Может ли случиться так, что годовая отметка окажется ниже, чем среднее всех текущих? Каково наибольшее возможное отличие годовой от средних текущих в ту и в другую сторону?

Попробуйте привести примеры разных экзотических ситуаций или придумать рассуждения, доказывающие, что какие-то комбинации невозможны. Предлагаем написать серьезное и вдумчивое эссе на эту животрепещущую школьную тему.

3. Странная игра Рекенталера (10 баллов). Недавно экономист Рекенталер (John Rekenthaler) исследовал странную биржевую игру[1]. Игрок вкладывает 1 доллар и бросает монетку. Если выпал орел, то сумма вклада увеличивается на 60%, если выпала решка, то вклад уменьшается на 40%. Так повторяется много раз, причем игрок не снимает деньги со вклада и ничего не добавляет ко вкладу, кроме выигрыша.



Игра странная потому, что в ней деньги не перераспределяются между имеющимися участниками, а все время должны притекать извне. Но это не единственная странность: игра парадоксальна. С одной стороны, при длительной игре математическое ожидание выигрыша каждого игрока больше суммы вклада, то есть в силу закона больших чисел при длительной игре игрок практически наверняка выиграет много денег, а с другой стороны, этот же игрок при длительной игре практически наверняка потеряет почти все деньги. Как эти два свойства могут уживаться в одной игре?

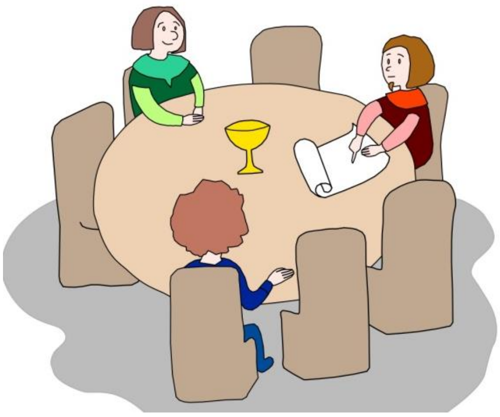
Попробуйте смоделировать или математически описать такую игру и разобраться в следующих вопросах.

1. Правда ли, что математическое ожидание выигрыша при большом числе бросаний монеты больше 1? Чему оно равно?
2. Правда ли, что игрок практически наверняка при большом числе бросаний монетки потеряет почти все деньги?
3. Если утверждения 1 и 2 верны, то как одно из них не противоречит другому?

Задачи

Задачи предполагают полные решения. Один лишь ответ без решения оценивается нулем баллов. Около каждой задачи указано, от какого класса оргкомитет рекомендует задачу, но это только ориентир. Любой участник может решать любую задачу и получать за нее баллы. Баллы за задачи суммируются.

1. Ровесники (от 6 класса, 1 балл). Витя и Маша родились в одном и том же году в июне. Найдите вероятность того, что Витя хотя бы на один день старше Маши.



2. Круглый стол короля Артура. Три рыцаря случайным образом рассаживаются на стулья, расставленные вокруг стола при дворе короля Артура. Какова вероятность того, что по обе стороны от каждого рыцаря окажется свободный стул, если:
а) стульев всего 7? **(От 6 класса, 1 балл).**
б) стульев всего n? **(От 7 класса, 1 балл).**

[1] https://www.morningstar.com/articles/1015274/why-most-stocks-are-losers

3. Переполненные вагоны. Гистограмма (рис. 1) показывает распределение вагонов пассажирского состава по количеству пассажиров (в 4% вагонов пассажиров от 10 до 19, в 6% вагонов – от 20 до 29 и т.д.). Если в вагоне 60 пассажиров или больше, то назовем такой вагон *переполненным*.

а) **(от 6 класса, 1 балл).** Найдите долю переполненных вагонов.

б) **(от 6 класса, 2 балла).** Найдите наименьшую возможную долю пассажиров, едущих в переполненных вагонах.

в) **(от 6 класса, 2 балла).** Может ли доля пассажиров, едущих в переполненных вагонах, быть меньше доли переполненных вагонов?

Распределение вагонов по числу пассажиров

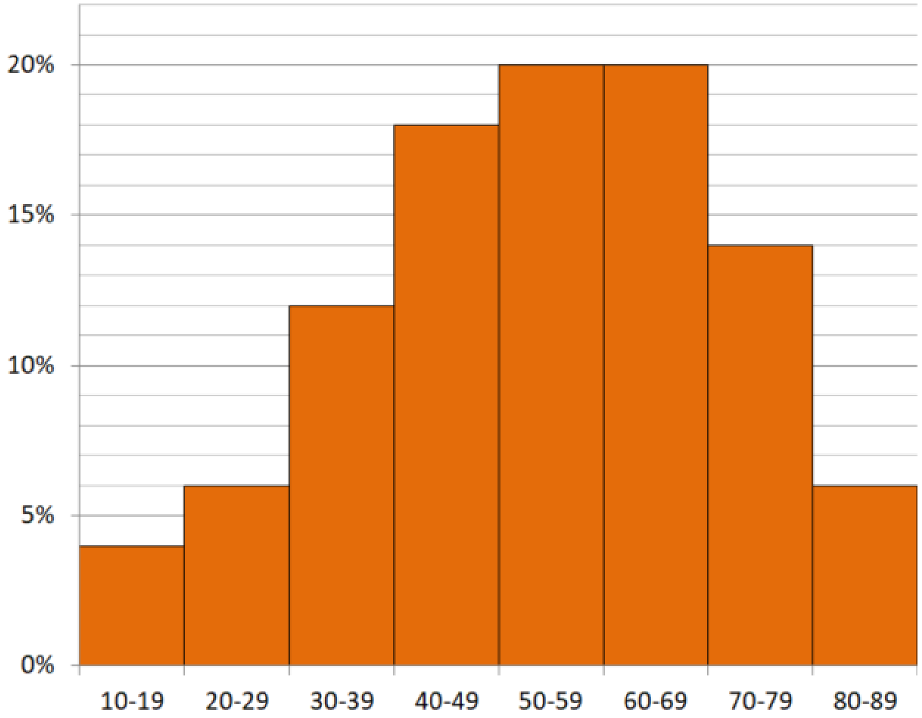


Рис. 1

4. Метро в Анчурии (от 6 класса, 2 балла). В каждом из пяти городов Анчурии имеется метрополитен. На рисунке 2 показаны схемы линий метро в этих пяти городах. Некоторые сведения о метрополитенах Анчурии даны в таблице. Определите, к какому городу относится каждая схема.

Табл 2. Метрополитены в городах Анчурии

Город	Общая протяженность линий, км	Количество станций	Пассажиропоток в день, тыс. чел.	Средняя длина перегона между соседними станциями, км
Сан-Матео	39	20	100	1,5
Коралио	15	9	22	1,5
Аласан	16	9	20	2
Альфоран	18	9	30	2
Солитас	14	8	25	2

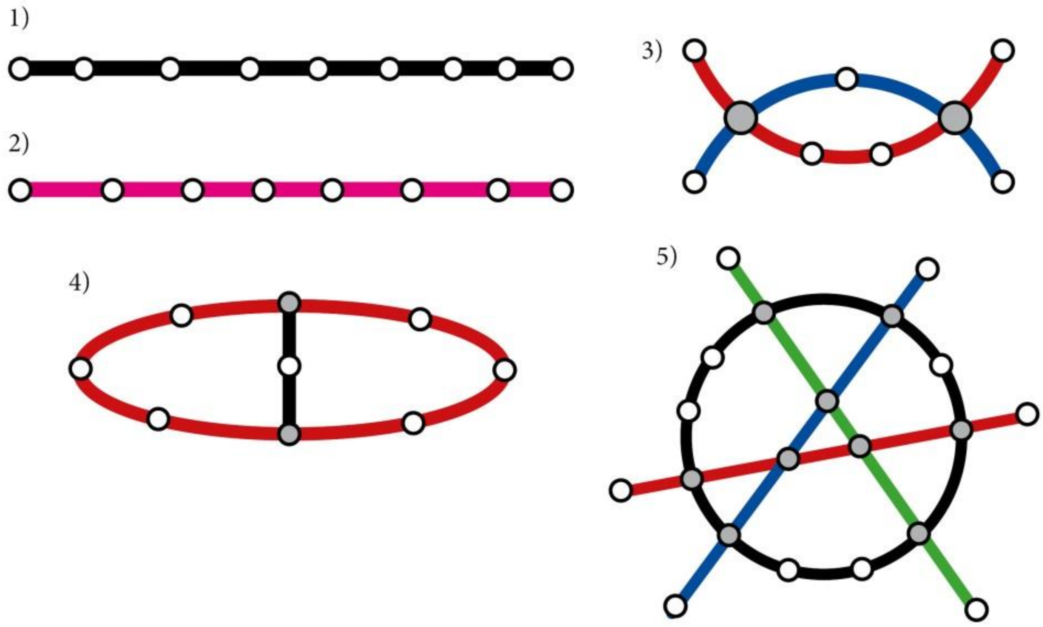


Рис. 2

5. Карточки (от 7 класса, 2 балла). Когда Витя был первоклассником, у него была касса цифр с 12 карточками: две карточки с цифрой 1, две карточки с цифрой 2 и так далее до цифры 6. Витя выложил их на стол в ряд в случайном порядке слева направо, а затем убрал первую единицу, первую двойку, первую тройку и так далее. Например, если у Вити сначала была последовательность 434653625112, то получилась бы последовательность 436512. Какова вероятность того, что у Вити на столе осталась последовательность 123456?

6. Витины терзания (от 7 класса, 2 балла). У Вити в неделю пять уроков математики – по одному во все дни с понедельника по пятницу. Витя знает, что с вероятностью $1/2$ учитель во время учебной недели не проверит у него домашнее задание, а с вероятностью $1/2$ проверит, причем только на одном из уроков математики, зато не угадаешь когда – на любом уроке с равными шансами.

В конце урока математики в четверг Витя понял, что пока на этой неделе учитель так и не проверил у него домашнее задание. Какова вероятность того, что домашнее задание будет проверено в пятницу?

7. Шоссе (от 7 класса, 3 балла). Шоссе, идущее с запада на восток, пересекается с n равнозначными дорогами, пронумерованными числами от 1 до n по порядку. По этим дорогам с юга на север и с севера на юг едут машины. Вероятность того, что машина подъедет к шоссе по каждой из дорог, равна $\frac{1}{n}$. Точно так же, вероятность того, что машина свернет с шоссе на каждую из дорог, равна $\frac{1}{n}$. Дорога, по которой машина покидает шоссе, не зависит от того, где эта машина въехала на шоссе.

Найдите вероятность того, что случайная машина, выехавшая на шоссе, минует k-й перекресток (проедет его насквозь или повернет на нем).

8. Одинокий шарик (от 8 класса, 2 балла). В 100 ящиков случайным образом кладут ровно 100 шариков. Какова вероятность того, что в последнем ящике окажется единственный шарик?

9. Две товарищеские серии (от 8 класса, 2 балла). Две футбольные команды А. и Б. одинаково хорошо играют в футбол. Тренеры договорились о двух товарищеских матчах. За победу в матче команде дается 2 очка, за ничью — 1 очко, при поражении — 0 очков. Вероятность ничьей в каждой встрече одинакова и равна p .

На следующий год прошла аналогичная товарищеская серия из двух матчей. Команды играли в том же составе, они были по-прежнему равной силы, но вероятность p выросла. Можно ли утверждать, что увеличилась вероятность того, что команды получат поровну очков?

10. Таблетки от рассеянности (от 8 класса, 3 балла). В январе доктор дал Рассеянному Ученому упаковку с 10 таблетками от рассеянности. Ученый хранит таблетки в шкафчике. Когда Ученого одолевает приступ рассеянности (а это бывает несколько раз в неделю в случайные моменты времени), он открывает шкафчик, берет с полочки упаковку, принимает таблетку и смотрит, сколько всего таблеток от рассеянности у него осталось. Если Ученый видит, что у него осталась только одна таблетка, он немедленно заказывает точно такую же новую упаковку в аптеке с моментальной доставкой и тут же кладет ее в тот же шкафчик на ту же полочку.

Если Ученый видит, что очередная упаковка опустела, он тут же ее выбрасывает в мусорное ведро.

Какова вероятность того, что в 10 часов утра 31 декабря у Рассеянного Ученого в шкафчике будет ровно две упаковки с таблетками от рассеянности?

11. Три треугольника (от 8 класса, 3 балла). Внутри треугольника ABC выбирают случайную точку M . Какова вероятность, что площадь одного из треугольников ABM, BCM и CAM окажется больше суммы площадей двух других?

12. Стефан Банах[2] и спички (от 8 класса, 4 балла). Неправдоподобная легенда гласит, что однажды в маленькой лавке в центре Львова Стефан Банах купил два коробка спичек и положил их в карман пиджака. В каждом коробке было 60 спичек.

Когда Банаху нужна спичка, он вынимает случайный коробок и берет из него спичку. В какой-то момент Банах достал коробок и обнаружил, что он пуст. Найдите математическое ожидание числа спичек в другом коробке.

13. Чистая плоскость (от 9 класса, 3 балла). Робот-пылесос “Orthogonal” решил пропылесосить координатную плоскость. Он выходит из точки O, расположенной в начале координат, и проходит по прямой расстояние X_1. В точке, куда он пришел, пылесос поворачивается и описывает окружность с центром в начале координат. Завершив окружность, он, не меняя направления, проходит по прямой расстояние X_2. Затем он снова поворачивается боком к началу координат, чтобы снова описать окружность с центром в начале ко-

[2] Стефан Банах - крупнейший математик XX века. Один из создателей функционального анализа.

ординат, а завершив ее, продолжает движение по прямой и проходит расстояние X_3. Таким образом он действует и дальше. Известно, что величины $X_1, X_2, X_3, \ldots$ подчиняются некоторому распределению с математическим ожиданием a и дисперсией d. Найдите математическое ожидание площади ограниченного n-й окружностью, по которой прошел пылесос.

14. Лепидоптеролог (от 9 класса, 4 балла). Закончив писать книгу о степенных средних, Рассеянный Ученый решил заняться лепидоптерологией, то есть изучением бабочек. Он взял сачок и отправился на Суматру, где водится ровно n видов бабочек. Когда Ученый видит бабочку, он накрывает ее сачком, а уже потом рассматривает, поскольку зрение у Ученого не очень хорошее.

Пойманная бабочка может оказаться j-го вида с вероятностью p_j, где $j = 1, \ldots, n$. Если бабочку такого вида Ученый еще не видел, то он ее тщательно измеряет, взвешивает, фотографирует, описывает и отпускает на волю. Если же бабочка такого вида уже встречалась, то Ученый отпускает ее сразу и ищет следующую бабочку.

Покажите, что через три дня такой охоты математическое ожидание числа видов бабочек, недостающих в описании Ученого, будет минимально возможным, если все вероятности p_j равны между собой.

15. Наименьшая сумма (от 9 класса, 4 балла). Есть очень много симметричных игральных кубиков. Их бросают одновременно. При этом с некоторой вероятностью $p > 0$ может получиться сумма очков 2022. Какова наименьшая сумма очков, которая может выпасть при бросании этих кубиков с той же вероятностью p?

16. Лишние крокодилы (от 9 класса, 6 баллов). Производитель шоколадных яиц с игрушкой внутри объявил, что выпускается новая коллекция, в которой десять разных крокодилов. Крокодилы равномерно и случайно распределены по шоколадным яйцам, то есть в случайно выбранном яйце каждый из крокодилов может оказаться с вероятностью 0,1. Леша захотел собрать полную коллекцию. Каждый день мама покупает ему одно шоколадное яйцо с крокодилом.

Сначала в коллекции Леши появился крокодил в очках, затем – крокодил с газетой. Третьим экземпляром, какого не было прежде, стал крокодил с тростью. Найдите математическое ожидание случайной величины «количество крокодилов с тростью, которые оказались у Леши к моменту, когда у него образовалась полная коллекция».